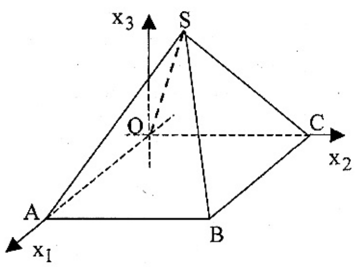
Jochen Weber

Aufgaben zur Abstandsberechnung

1 Gegeben ist die Menge der Geraden $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} t-1 \\ -1 \\ 2t+3 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ und die Ebene E: $x_1 - x_2 - x_3 + 4 = 0$.
Bestimmen Sie aus der Menge der Geraden g_t diejenige Gerade, die parallel zur Ebene E verläuft und berechnen Sie deren Abstand zur Ebene E. (Abitur 2002 BI)

2 Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie den Punkt L der Geraden g, der dem Ursprung am nächsten liegt.
(Abitur 2005 BI)

3 Eine Lampe ist an einem im Punkt S befestigten Seil aufgehängt. Die Position der Lampe kann für spezielle Lichteffekte durch Veränderung der Seillänge verändert werden.
Berechnen Sie den Abstand der Lampe von der Seitenkante OS, wenn die Lampe auf Höhe der x_1, x_2-Ebene angebracht wird. Die Koordinaten der Punkte lauten: A(35/0/0), B(35/35/0), C(0/35/0) und S(17,5/17,5/22). (Abitur 2010 BI)



4.1 Berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs 0 von der durch die Punkte A(1/-2/1) und B(1/2/3) festgelegten Geraden g.
Bestimmen Sie auch den Punkt L auf der Geraden g, der die geringste Entfernung vom Ursprung hat. (Abitur 2011 BI)
(Teilergebnis: L(1;-0,8;1,6)

4.2 Die Punkte S_1 und S_2 liegen auf der Geraden g. Die Strecke $[S_1S_2]$ bildet die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit dem Koordinatenursprung 0 als Spitze. Dieses Dreieck besitzt die Flächenmaßzahl $A_\Delta = 2 \cdot \sqrt{4,2}$.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2. Runden Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2 auf zwei Stellen nach dem Komma.
(Zwischenergebnis: $\left|\overrightarrow{LS_1}\right| = 2$)

5 Die Kirchturmspitze eines Dorfes sei der Punkt K(-2/9/32). Ein neugieriger Mensch steuert in dem Dorf eine Drohne entlang einer Geraden durch den Punkt P(2/0/1,5) in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. (Abitur 2017 BI)

Bei der Betrachtung wird ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde gelegt. Die Koordinaten sind alle in Metern angegeben, auf das Mitführen der Einheit Meter kann bei den Berechnungen verzichtet werden.
Berechnen Sie die kürzeste Entfernung der Drohne von der Kirchturmspitze.

6.0 Ein Speichenreflektor für ein Fahrrad beruht auf dem Prinzip eines Tripelspiegels. Dieser reflektiert einfallende Strahlung unabhängig von seiner Ausrichtung weitgehend zurück zur Strahlungsquelle. Erreicht wird dieser Effekt durch drei ebene Spiegel, die aufeinander senkrecht stehen. Die drei Koordinatenebenen des $\mathbb{R}^3$ mit den Gleichungen in Koordinatenform $E_{23}: x_1 = 0, E_{13}: x_2 = 0$ und $E_{12}: x_3 = 0$ bilden zusammen einen derartigen Tripelspiegel. (Abitur 2018 BI)

6.1 Ein vom Punkt A(7/12/2) in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ausgehender Lichtstrahl trifft im Punkt S auf die Ebene E_{12}. Geben Sie eine Gleichung für die Gerade g_0 an, auf welcher der Lichtstrahl verläuft. Zeigen Sie, dass gilt: S(5/8/0).

6.2 Berechnen Sie den Abstand von $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$ zur Ecke des Tripelspiegels, die sich im Ursprung des Koordinatensystems befindet.

7 Für Werbezwecke soll von der Spitze S(-13/16/30) eines Hotels auf kürzestem Weg zur nahen Uferlinie des Kanals ($g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 27 \\ -24 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$) eine Lichterkette gespannt werden.
Berechnen Sie die Mindestlänge der Lichterkette auf Meter gerundet. (Abitur 2018 BII)

8.0 Gegeben sind die beiden Geraden g und h mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $s \in \mathbb{R}$ und

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$.

Entscheiden Sie begründet, welche der folgenden Aussagen wahr sind.

8.1 g und h sind echt parallel und haben zueinander den Abstand 1 LE.

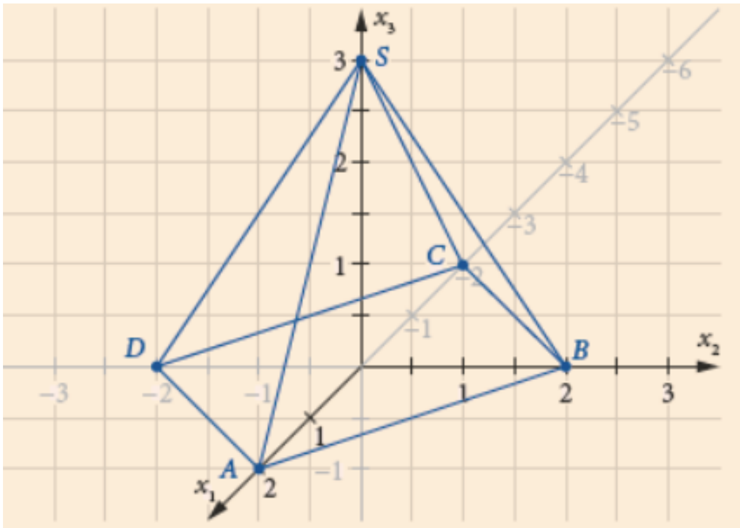
8.2 Es gibt genau zwei Geraden, die parallel zu g sind und den Abstand 2 LE haben.

8.3 Der Punkt P(4/1/4) liegt auf g, der Punkt Q(2/2/2) liegt auf h und P und Q haben den Abstand 3 LE.

8.4 Es gibt genau zwei Ebenen, die parallel zu g und auch zu h sind und von beiden Geraden den Abstand 4 LE haben.

8.5 Es gibt genau eine Ebene, die g und h enthält. Der Punkt R(3/4/-5) hat zu dieser Ebene den Abstand 5 LE.

9.0 Betrachten Sie die folgende Pyramide.



9.1 Geben Sie die Achsenabschnittsform derjenigen Ebene E an, in der die Punkte A, B und S liegen.

9.2 Bestimmen Sie den Abstand von E zum Punkt D.

9.3 Berechnen Sie im Dreieck ABS den Winkel im Punkt S.

9.4 Berechnen Sie die Höhe im Dreieck ABS.

10 Familie Brunner besitzt ein Grundstück mit einer Rasenfläche in Hanglage. Um sich aufgrund seines fortgeschrittenen Alters das Rasenmähen zu erleichtern, plant Herr Brunner den Kauf eines Rasenmähroboters. Für die Auswahl eines geeigneten Mähroboters möchte er vorab einige Kriterien überprüfen, um anhand von Datenblättern ein passendes Gerät auszuwählen. Hierfür legt Herr Brunner ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ fest, in dem sich die ebene, viereckige Rasenfläche durch die Eckpunkte $A(30|1|2)$, $B(0|0|0)$, $C(1|-15|5)$ und $D(31|-14|7)$ beschreiben lässt. Herr Brunner wählt dabei die x_3-Achse so, dass die x_3-Koordinate die Höhe eines Ortes auf der Rasenfläche gegenüber der horizontalen x_1-x_2-Ebene angibt. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Meter. Auf das Mitführen von Einheiten kann bei der Berechnung verzichtet werden.
(Abitur 2019 Teil 2 GI)
Die Ladestation für den Mähroboter soll so auf dem Rand der Rasenfläche zwischen den Punkten A und B platziert werden, dass die Entfernung der Ladestation zur Anschlussstelle für die Stromversorgung so kurz wie möglich ist. Eine geeignete Anschlussstelle für die Stromversorgung der Ladestation befindet sich bei $S(20|10|1)$ außerhalb der Rasenfläche.
Bestimmen Sie die Koordinaten für den optimalen Standort der Ladestation L. Runden Sie die Koordinaten auf eine Nachkommastelle.
Erstellen Sie anschließend eine Skizze, aus der die relative Lage der Punkte A, B und L zueinander hervorgeht.

11.0 Die Mitglieder des Stadtrats einer schnell wachsenden Kleinstadt möchten zwei nahe gelegene Baugebiete am Stadtrand durch eine neue Straße verbinden lassen.
Für die Planung des Straßenverlaufs wird ein kartesisches Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ zugrunde gelegt. Alle angegebenen Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Meter.
Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.
(Abitur 2019 Nachtermin Teil 2)

11.1 Die Verbindungsstraße soll geradlinig vom Punkt $U(0|0|0)$ im Baugebiet I ausgehend bis zum Punkt $V(900|400|50)$ im Baugebiet II endend verlaufen.
Entscheiden und begründen Sie jeweils, welche der drei folgenden Geraden a), b) und c) eine genaue, ungenaue bzw. falsche mathematische Beschreibung dieser Anforderungen an die Verbindungsstraße darstellt.

a) $g: \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 900 \\ 400 \\ 50 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ b) $g: \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 900 \\ 400 \\ 50 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 900 \\ 400 \\ 50 \end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 450 \\ 200 \\ 25 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 90 \\ 40 \\ 5 \end{pmatrix}, \lambda \in [-5;5]$

11.2 Die Stromversorgungsleitung für Baugebiet I verläuft entlang der Geraden s:

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -200 \\ -200 \\ 30 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -55 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

Ermitteln Sie die Entfernung der Stromversorgungsleitung zum Punkt U.
Runden Sie das Ergebnis auf ganze Meter.

Lösungen

1

g_t in E einsetzen: $2+s(t-1)-(2-s)-(2+s(2t+3))+4=0$

$\Rightarrow 2+st-s-2+s-2-2st-3s+4=0$

$\Rightarrow -st-3s+2=0 \quad \Rightarrow t=-3$

Abstand von g_{-3} zu E $\Rightarrow$ Abstand von P(2/2/2) zu E:

Abstandsformel: $\left|\frac{-x_1+x_2+x_3-4}{\sqrt{3}}\right|=0 \quad \Rightarrow d(P;E)=\left|\frac{-2+2+2-4}{\sqrt{3}}\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}$

2

Aufstellen einer Hilfsebene H, die senkrecht auf g steht und durch den Ursprung geht:

$$H:\begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right]=0 \quad \Rightarrow H: -3x_1+x_2+3x_3=0$$

$g\cap H=\{L\} \quad \Rightarrow -3(-2-3s)+2+s+3(1+3s)=0 \quad \Rightarrow s=-\frac{11}{19}$

$\Rightarrow L\left(-\frac{5}{19}/\frac{27}{19}/-\frac{14}{19}\right)$

3

Lampe ist im Diagonalenschnittpunkt D des Quadrats 0ABC angebracht

$$\vec{d} = \vec{0} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{0B} = \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D(17,5/17,5/0)$$

Berechnung des Abstandes des Punktes D zur Seitenkante OS

$\Rightarrow$ Hilfsebene H aufstellen, die senkrecht auf OS steht und durch D verläuft

$$\Rightarrow H: \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Rightarrow H: 17,5x_1 + 17,5x_2 + 22x_3 - 612,5 = 0$$

$$H \cap g_{OS} = \{L\} \qquad g_{OS}: \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 17,5 \cdot 17,5\lambda + 17,5 \cdot 17,5\lambda + 22 \cdot 22\lambda - 612,5 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \frac{1225}{2193}$$

$$\Rightarrow \vec{l} = \frac{1225}{2193} \cdot \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,775 \\ 9,775 \\ 12,289 \end{pmatrix}$$

$$d(D;0S) = \left|\overrightarrow{LD}\right| \left| \begin{pmatrix} 7,725 \\ 7,725 \\ -12,289 \end{pmatrix} \right| \approx \sqrt{230,37} \approx 16,44$$

4.1

$$g_{AB}:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+s\cdot\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right]\Rightarrow g_{AB}:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$$

Wähle beliebigen Punkt L auf g_{AB} : $L(1/-2+4s/1+2s)$

$$\overrightarrow{0L}\cdot\vec{r}_g=0\ \Rightarrow\begin{pmatrix}1\\-2+4s\\1+2s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow-8+16s+2+4s=0\ \Rightarrow20s-6=0$$

$$\Rightarrow s=0{,}3$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{0L}=\begin{pmatrix}1\\-2+4\cdot0{,}3\\1+2\cdot0{,}3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-0{,}8\\1{,}6\end{pmatrix}\Rightarrow L(1/-0{,}8/1{,}6)$$

$$\Rightarrow d(0;g_{AB})=\left|\overrightarrow{0L}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\-0{,}8\\1{,}6\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1^2+(-0{,}8)^2+1{,}6^2}=\sqrt{4{,}2}$$

4.2

$$A_\Delta=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{S_1S_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{0L}\right|=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\left|\overrightarrow{LS_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{0L}\right|=\left|\overrightarrow{LS_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{0L}\right|=2\cdot\sqrt{4{,}2}$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{LS_1}\right|=2$$

$$S_1(1/-2+4s/1+2s)\ \Rightarrow\overrightarrow{LS_1}=\begin{pmatrix}1\\-2+4s\\1+2s\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-0{,}8\\1{,}6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1{,}2+4s\\-0{,}6+2s\end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{LS_1}\right|=\sqrt{(-1{,}2+4s)^2+(-0{,}6+2s)^2}=\sqrt{16s^2-9{,}6s+1{,}44+4s^2-2{,}4s+0{,}36}=$$
$$=\sqrt{20s^2-12s+1{,}8}$$

$$\Rightarrow\sqrt{20s^2-12s+1{,}8}=2\ \Rightarrow20s^2-12s+1{,}8=4\ \Rightarrow20s^2-12s-2{,}2=0$$

$$\Rightarrow s_{1/2}=\frac{12\pm\sqrt{144-4\cdot20\cdot(-2{,}2)}}{40}=\frac{12\pm\sqrt{320}}{40}=\frac{12\pm8\sqrt{5}}{40}$$

$$\Rightarrow s_1=\frac{3+2\sqrt{5}}{8}\quad\Rightarrow S_1(1/0{,}99/2{,}49)$$

$$s_2=\frac{3-2\sqrt{5}}{8}\quad\Rightarrow S_2(1/-2{,}59/0{,}71)$$

Alternative:

$$\overrightarrow{0S_1}=\overrightarrow{0L}+2\cdot\overrightarrow{AB}^0\qquad\overrightarrow{0S_2}=\overrightarrow{0L}-2\cdot\overrightarrow{AB}^0$$

5

$$f:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\1,5\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\6\end{pmatrix}$$

Berechnung des Abstandes von K(-2/9/32) zur Flugbahn

Aufstellen einer Ebene H senkrecht zur Flugbahn durch den Punkt K

$$H:\begin{pmatrix}-1\\2\\6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x_1+2\\x_2-9\\x_3-32\end{pmatrix}=0 \quad\Rightarrow H:-x_1+2x_2+6x_3-212=0$$

$$H\cap f=\{L\}$$

$$-(2-k)+2(2k)+6(1,5+6k)-212=0$$

$$-2+k+4k+9+36k-212=0 \quad\Rightarrow -205+41k=0 \quad\Rightarrow k=5$$

$$\vec{f}=\begin{pmatrix}2\\0\\1,5\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\10\\31,5\end{pmatrix}$$

$$d(K;f)=\left|\overrightarrow{FK}\right|=\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\0,5\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1+1+0,25}=\sqrt{2,25}=1,5$$

Kürzeste Entfernung von der Drohne zur Kirchturmspitze beträgt 1,5 m.

6.1

$$g_0:\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\12\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$E_{12}\cap g_0=\{S\} \quad\Rightarrow 2-t=0 \quad\Rightarrow t=2$$

$$\Rightarrow\vec{s}=\begin{pmatrix}7\\12\\2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\8\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow S(5/8/0)$$

6.2

Abstand vom Ursprung zu g_1:

$$H:\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x_1-0\\x_2-0\\x_3-0\end{pmatrix}=0 \quad \Rightarrow H: -2x_1-4x_2+2x_3=0$$

$$H\cap g_1=\{F\} \quad \Rightarrow -2(3-2\sigma)-4(4-4\sigma)+2(2+2\sigma)=0 \quad \Rightarrow \sigma=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \vec{f}=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}+0,75\cdot\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,5\\1\\3,5\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \overrightarrow{OF}=\begin{pmatrix}1,5\\1\\3,5\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(0;g_1)=\left|\begin{pmatrix}1,5\\1\\3,5\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1,5^2+1^2+3,5^2}=\sqrt{15,5}\approx 3,94$$

7

$L(27/-24+k/3)$

$$\overrightarrow{SL}=\begin{pmatrix}40\\-40+k\\-27\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}40\\-40+k\\-27\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0 \quad \Rightarrow -40+k=0 \quad \Rightarrow k=40 \quad \Rightarrow \overrightarrow{SL}=\begin{pmatrix}40\\0\\-27\end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{SL}\right|=\sqrt{40^2+(-27)^2}\approx 48,26$$

Die Lichterkette muss mindestens 49 Meter lang sein.

8.1 Richtig. Die Richtungsvektoren sind kollinear, der Abstand der Geraden ist 1 LE.

8.2 Falsch. Es sind unendlich viele.

8.3 Richtig. P liegt auf g, Q liegt auf h und der Abstand der Punkte ist 3 LE.

8.4 Richtig. Es gibt zwei Ebenen, die von der Ebene, in der die beiden parallelen Geraden liegen, den Abstand 4 haben. Es gibt allerdings keine Ebene, die zwischen den beiden parallelen Geraden liegt, die den Abstand 4 hat.

8.5 Falsch. Der Abstand ist nicht 5 LE.

9.1 $E: \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{3}x_3=1$

9.2

$$E: 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$$

$$\text{Hilfsgerade l: } l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

$$l \cap E = \{L\} \quad \Rightarrow 9s - 6 + 9s + 4s = 6 \quad \Rightarrow s = \frac{6}{11}$$

$$\Rightarrow \vec{l} = \begin{pmatrix} \frac{18}{11} \\ -\frac{4}{11} \\ \frac{12}{11} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \overrightarrow{LD} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{11} \\ -\frac{18}{11} \\ -\frac{12}{11} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \left|\overrightarrow{LD}\right| = \sqrt{\frac{72}{11}} \approx 2{,}56$$

9.3

$$\cos\alpha = \left| \frac{\overrightarrow{SA} \circ \overrightarrow{SB}}{\left|\overrightarrow{SA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SB}\right|} \right|$$

$$\overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \left|\overrightarrow{SA}\right| = \sqrt{13} \quad \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \left|\overrightarrow{SB}\right| = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{9}{13} \quad \Rightarrow \alpha \approx 46{,}19°$$

9.4

Das Dreieck ABS ist gleichschenklig mit Basis $[AB]$;

Höhe des Dreiecks ABS ist die Strecke $[MS]$,

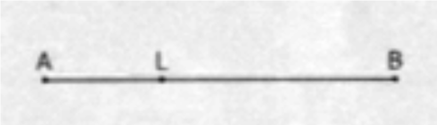
wobei M der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$ ist.

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h = \left|\overrightarrow{MS}\right| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{11} \approx 3{,}32$$

Alternative: Abstand des Punktes S von der Geraden durch die Punkte A und B berechnen

10



Berechnung des Abstandes des Punktes S zur Geraden AB:

Hilfsebene, die durch S geht und senkrecht auf AB steht:

$$H: \begin{pmatrix} -30 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 20 \\ x_2 - 10 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad H: -30x_1 - x_2 - 2x_3 + 612 = 0$$

$$AB: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

AB in H einsetzen:

$$-30 \cdot (-30s) - (-s) - 2 \cdot (-2s) + 612 = 0 \quad \Rightarrow 905s + 612 = 0 \quad \Rightarrow s = -\frac{612}{905}$$

$$\overrightarrow{0L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{612}{905} \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20,3 \\ 0,7 \\ 1,4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow L\left(20,3|0,7|1,4\right)$$

11.1

a) Ungenau. Die Gerade g verläuft unendlich lang,
beinhaltet aber die Punkte U und V.

b) Falsch. Der Ursprung liegt nicht auf der Geraden g.

c) Genau. Straße verläuft von (0|0|0) für $\lambda = -5$
zu (900|400|50) für $\lambda = 5$

11.2

Allgemeiner Vektor von U zur Geraden s: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -200-55\mu \\ -200+30\mu \\ 30 \end{pmatrix}$

$$\vec{v} \perp \vec{r}_s \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -200-55\mu \\ -200+30\mu \\ 30 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -55 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 11000+3025\mu-6000+900\mu=0 \quad \Rightarrow 5000+3925\mu=0 \quad \mu=-\frac{200}{157}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -129{,}94 \\ -238{,}22 \\ 30 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \left|\vec{v}\right| = \sqrt{(-129{,}94)^2+(-238{,}22)^2+30^2} \approx 273{,}0\,\text{m}$$